**Лекция №6.**

**Оператор Фредгольма и его степени. Итерированные ядра.**

Пусть ядро  квадратично суммируема на основном квадрате.

Это допущение, если не оговорено противное, предполагается выполненным во всем последующем.

Введем обозначение

 (1)

Пусть функция  квадратично суммируема на .

Докажем, что в этом случае интеграл (1) существует при почти всех  и представляет собой функцию, квадратично суммируема в том же промежутке.

Имеем

.

Первое слагаемое справа суммируемо по  при почти всех , второе просто суммируемо по . Отсюда следует, что в указанном промежутке подинтегральная функция в интеграле (1) суммируема при почти всех  и, следовательно, интеграл (1) есть функция от , определенная почти всюду на .

Далее по неравенству Коши-Буняковского

,

и так как ядро квадратично суммируемо в основном квадрате, то функция  квадратично суммируема на . Интегрируя последнее неравенство и извлекая корень, получаем

  ,

 .

Таким образом, если квадратично суммируемая функция  задана, то интеграл (1) определяет новую (также квадратично суммируемую) функцию.

Можно сказать, что интеграл (1) задает некоторый закон, по которому каждой квадратично суммированной функции  приводится в соответствие, и при том единственным образом, новая функция .

В этом случае говорят, что если ядро  квадратично суммировано в основном квадрате, то интеграл (1) определяет некоторый оператор на множестве функций, квадратично суммированных в промежутке .

Этот оператор называется **оператором Фредгольма.**

**Свойства оператора Фредгольма:**

1. Если  и  константы, а  и  - квадратично суммируемые функции, то

,

т.е. всякий оператор Фредгольма ­­– линейный оператор. Следует из того, что интегральное уравнение Фредгольма – линейное уравнение.

2. Произведение операторов Фредгольма.

Пусть дан еще один оператор Фредгольма

.

По определению интеграл  ограничен. Положим .

Составим выражение

 – произведение операторов Фредгольма. Нетрудно видеть, что умножение операторов ассоциативно. Действительно, если , , – операторы Фредгольма, то

.

Это означает, что над функцией  произведена операция , над полученной функцией  произведена операция  и над полученной функцией  произведена операция .

Докажем, что произведение операторов Фредгольма также есть оператор Фредгольма.

Составим выражение :

. (2)

Повторный интеграл

 (3)

существует. Действительно, внутренний интеграл есть квадратично суммированная функция от , а тогда её произведение на квадратично суммированную функцию  суммируемо при почти всех . Из существования интеграла (3) вытекает суммируемость функции



в квадрате , и в силу теоремы Фубини, в интеграле (2) можно изменить порядок интегрирования

.

Заменив  и  получим



и если обозначить

, то .

Далее, по неравенству Коши-Буняковского

.

Интегрируя это неравенство по основному квадрату, получим



.

Таким образом, ядро  оператора – квадратично суммируемое в основном квадрате. И по определению оператор  есть оператор Фредгольма.

**Замечание.** Умножение операторов Фредгольма в общем случае не перестановочно.

Рассмотрим пример.

, .

Пусть , , , , тогда

,

.

Если ядра операторов и  удовлетворяют условиям

, , (4)

то имеем



,



.

Проинтегрируем эти выражения по  на отрезке 

,

.

Следовательно, если ядра операторов и  удовлетворяют условиям (4), то и ядра операторов и  удовлетворяют условиям (4) с постоянными и  соответственно.

Очевидно, произведение нескольких операторов Фредгольма есть также оператор Фредгольма. Произведение  - одинаковых операторов Фредгольма  называется -ой степенью оператора  и обозначается .

Очевидно , , …., .

Так как умножение операторов ассоциативно, то верна общая формула

, . (5)

Из определения степени оператора следует, что степень оператора Фредгольма есть оператор Фредгольма. Обозначим через  ядро оператора , тогда

 (6)

Ядро  называется -ым итерированным ядром по отношению к ядру .

Из формулы  можно получить рекуррентную формулу для итерированных ядер

,

,

 и т.д.

.

Докажем важную формулу для итерированных ядер



заменяем ,  получим

. Отсюда следует, что

. (7)

Если положить , получим ,

если , получим .

Заменив в этой формуле ядро  по той же формуле, т.е.

 и т.д. придем к формуле

. (8)

Обозначим

. (9)

Вспомним формулы

 и .

Положим , тогда  и . Откуда следует, что .

Из этого неравенства следует, что

 или . (10)

Применим теперь неравенство  к оператору , получим важное для последующего неравенство

.

Если ядро  удовлетворяет еще и условию , то тому же условию удовлетворяют и итерированные ядра.

Пусть . В формуле  положим , тогда . Тогда



.

Тогда     .

**Метод последовательных приближений в классе .**

Решим уравнение Фредгольма методом последовательных приближений. Уравнение Фредгольма

 (1)

запишем в виде , где .

За начальное приближение примем , далее построим цепочку равенств

, (2)

,

,

 и т.д.

или

.

Выясним, при каких условиях последовательные приближения имеют предел при . Функцию  можно рассматривать как частичную сумму ряда .

Задача состоит в определении условий сходимости этого ряда, который называют рядом Неймана.

**Теорема.** Если ядро интегрального уравнения квадратично суммируемо и , где , то ряд Неймана для этого уравнения сходится в среднем к квадратично суммируемому решению уравнения (1). Решение единственно.

Доказательство. Оценим величину



.

При достаточно большом   может быть сколь угодно малой. Отсюда следует, что ряд Неймана сходится в среднем к некоторой квадратично суммируемой функции, т.е. .

Докажем, что функция  удовлетворяет уравнению (1). В формуле (2) положим . Левая часть имеет пределом . Достаточно доказать, что  в среднем.

 при .

Остается доказать, что построенное решение – единственно. Пусть уравнение (1) имеет два квадратично суммируемых решения  и . Тогда

 и  

, .

Докажем, что . , тогда  или

. Так как   . Т.е. решение единственно.

**Пример 1.**



, , , , , .













и т.д. .

**Пример 2.**



, 



, ,

.











 и т.д.

 

.

**Понятие о резольвенте.**

Вернемся к уравнению Фредгольма

.

Пусть , тогда уравнение имеет единственное решение, которое можно представить в виде ряда Неймана

 или

 (3)

Нужно доказать, что в ряде (3) можно переставить порядок суммирования и интегрирования. Выполним пока эту перестановку формально

 (4)

Докажем, что ряд  (5)

сходится при  в среднем в основном квадрате.

, .

Тогда



 при .

Всё доказано.

Сумма ряда (5) называется резольвентой ядра  или резольвентой уравнения Фредгольма.

/

Резольвента квадратично суммируема в основном квадрате, так как является суммой ряда сходящегося в среднем в основном квадрате.

Ряд (5) определяет резольвенту в круге  комплексной - плоскости.

Докажем, что ряд (5) можно интегрировать почленно по , предварительно умножив его на произвольную квадратично суммируемую функцию .

.

Для доказательства достаточно оценить норму разности



.

Внутренний интеграл оценим по неравенству Буняковского





при .

Следовательно, всё доказано и решение уравнения можно представить через резольвенту

.

**Пример 3.**

С помощью итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения



, , , 



.

 и т.д.

.



.

.

**Пример 4.**

****

**, **

****

**** и т.д.







Если ядра  и  два ортогональных ядра, то резольвента, соответствующая ядру  равна сумме резольвент, соответствующих  и , т.е.

, .



